# Metody obliczeniowe
# - modelowanie i symulacje

J. Pamin

Katedra Technologii Informatycznych w Inżynierii

Wydział Inżynierii Lądowej Politechniki Krakowskiej

Strona domowa: www.CCE.pk.edu.pl



## Zagadnienia i źródła

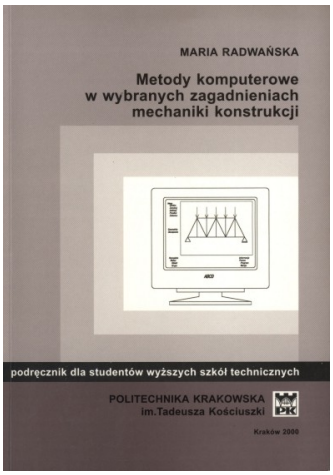
- Zakres i literatura przedmiotu
- Modelowanie zjawisk fizycznych
- Metoda Elementów Skończonych
- Symulacje w inżynierii lądowej i fizyce matematycznej

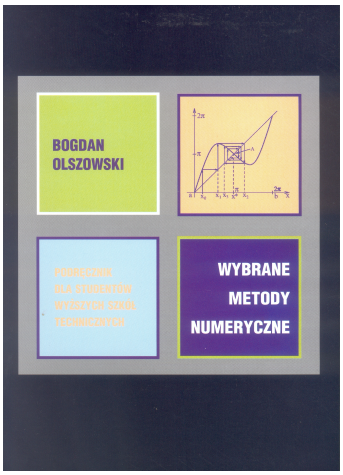
Podziękowania:
Autorzy prezentowanych symulacji
C.A. Felippa (Univ. of Colorado at Boulder)
`www.colorado.edu/engineering/cas/courses.d/IFEM.d`
TNO DIANA `http://www.tnodiana.com`
ADINA R&D, Inc. `http://www.adina.com`
ANSYS, Inc. `http://www.ansys.com`
R.D. Cook, *Finite Element Method for Stress Analysis*, Wiley 1995
T. Kolendowicz *Mechanika budowli dla architektów*, Arkady 1996
Współpracownicy z Instytutu L-5, WIL, PK

# Zakres przedmiotu i literatura

- Wykłady (podstawy teoretyczne, przykłady)
- Laboratoria (ROBOT, ABAQUS)
- 1 ćwiczenie i 4 projekty
- Kolokwia testowo-zadaniowe z 2 części przedmiotu

POLITECHNIKA KRAKOWSKA im. Tadeusza Kościuszki
Cz. Cichoń, W. Cecot, J. Krok, P. Pluciński
Metody Komputerowe w liniowej mechanice konstrukcji
Wybrane zagadnienia
Wydanie drugie zmienione
Podręcznik dla studentów wyższych szkół technicznych
KRAKÓW 2010

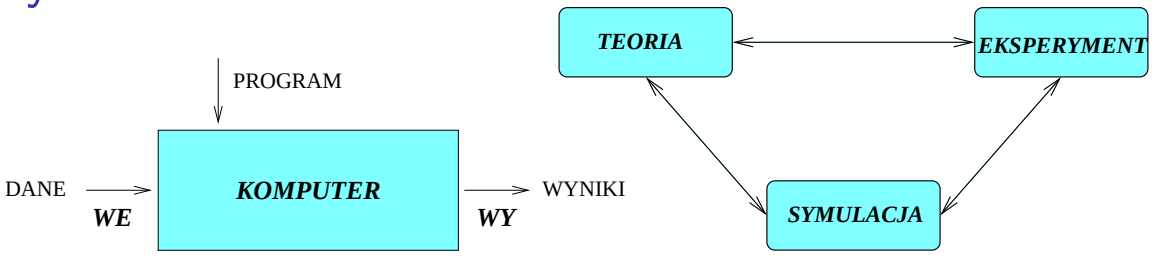

MARIA RADWAŃSKA
Metody komputerowe w wybranych zagadnieniach mechaniki konstrukcji
podręcznik dla studentów wyższych szkół technicznych
POLITECHNIKA KRAKOWSKA im.Tadeusza Kościuszki




Liczne podręczniki w języku angielskim:
Cook, Felippa, Ottosen & Petersson, Zienkiewicz & Taylor



# Metody obliczeniowe



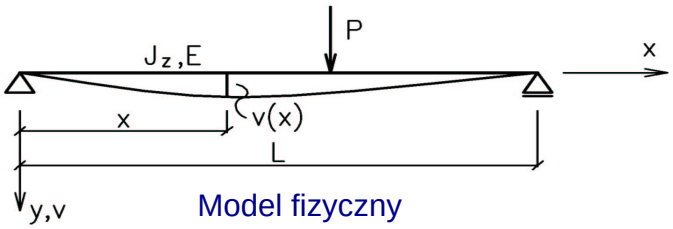

- "Metoda komputerowa to proces analizy zagadnienia z wykorzystaniem metod obliczeń *przybliżonych*, zaimplementowanych jako programy komputerowe."
- "Dzieki algorytmizacji współczesnych metod aproksymacyjnych i dużym możliwościom obliczeniowym komputerów możliwe jest poszukiwanie rozwiązania optymalnego drogą *symulacji* komputerowych."

Symulacje komputerowe

- zastępują/wspomagają badania eksperymentalne (na modelach materialnych)
- zastępują/wspomagają metody analityczne (ale nie zastępują modelowania)

# Proces modelowania

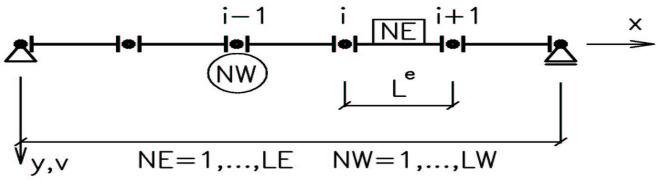
Konstrukcja rzeczywista




Model fizyczny

*Równanie różniczkowe i warunki brzegowe*

Model matematyczny



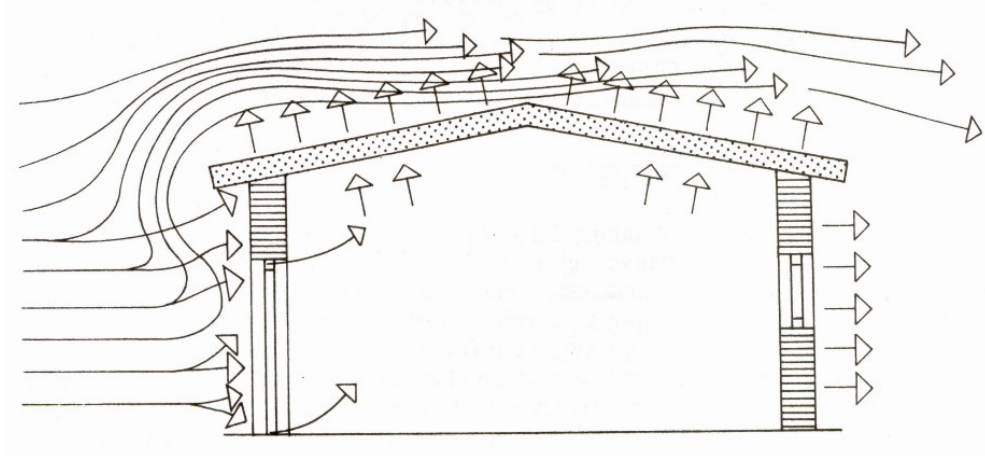

Model numeryczny

Cel: otrzymanie prostego modelu matematycznego, ujmującego najistotniejsze właściwości konstrukcji i jej zachowanie pod działaniem obciążeń, i dostosowanego do narzędzi obliczeniowych.



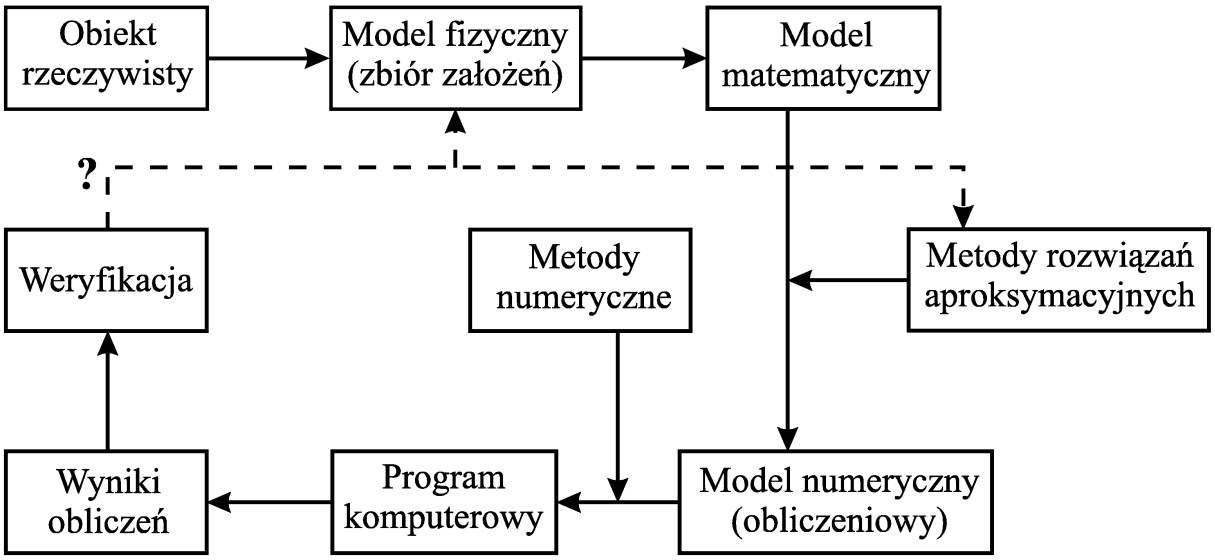
# Proces modelowania

Modelowanie to idealizacja, uproszczenie, aproksymacja



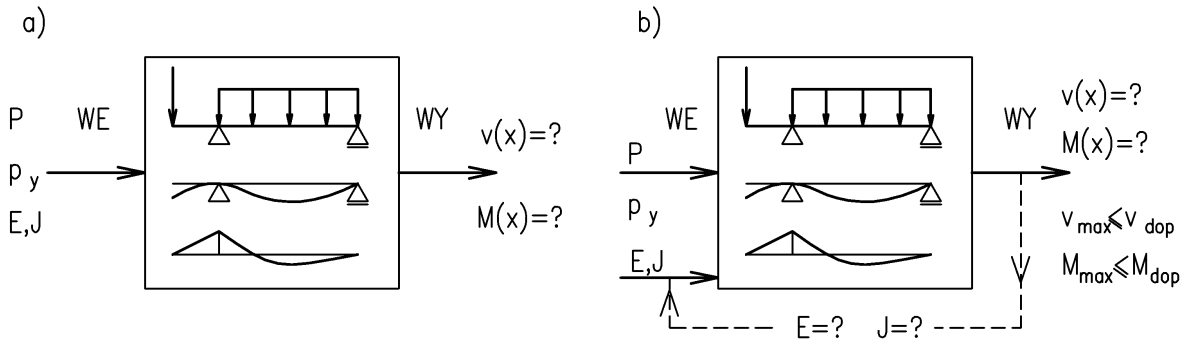
Zbiór założeń: model konstrukcji, materiału, obciążenia
Model fizyczny: reprezentacja istotnych cech
Model matematyczny: zbior równań (algebraicznych, różniczkowych, całkowych) + warunki graniczne (ograniczające)

# Schemat realizacji metody obliczeniowej






# Analiza i synteza konstrukcji




Analiza modelu

Synteza (projektowanie)

# Modele fizyczne

Obniżenie wymiarowości:

- ustroje prętowe (geometrycznie jednowymiarowe)
- ustroje powierzchniowe (dwuwymiarowe)
- ustroje bryłowe (trójwymiarowe)



# Modele fizyczne i matematyczne

Zmiany w czasie:

- zagadnienia stacjonarne - niezależne od czasu (statyka)
- zagadnienia niestacjonarne - zależne od czasu (dynamika)

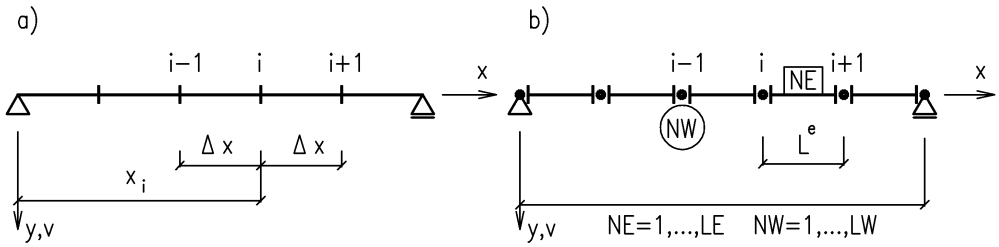
Uproszczenia na podstawie hipotez:

- kinematycznych (geometrycznych), np. dominujące wymiary, rodzaj przekroju
- statycznych/dynamicznych - np. obciążenia wolno- lub szybkozmienne, obciążenia działające w jednej płaszczyźnie

Modele matematyczne są:

- liniowe (małe deformacje i prawo Hooke'a) $\longrightarrow$ obowiązuje zasada superpozycji
- nieliniowe

# Model obliczeniowy




Rozwiązanie analityczne dla modelu ciągłego lub

rozwiązanie numeryczne dla układu dyskretnego

Dyskretyzacja problemu

Metoda Różnic Skończonych - MRS (*FDM*)

Metoda Elementów Skończonych - MES (*FEM*)

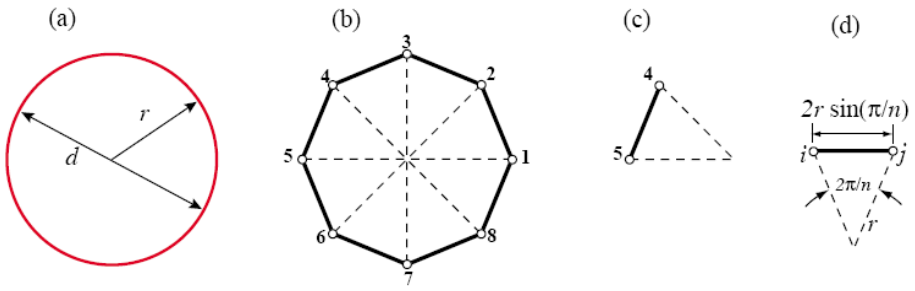
Metoda Elementów Brzegowych - MEB (*BEM*)



# Dlaczego warto poznać MES

- Dla wielu praktycznych problemów inżynierskich nie udaje się znaleźć rozwiązania analitycznego (skomplikowana dziedzina zadania, obciążenie, nieliniowości)
- Dzięki metodzie numerycznej można łatwo i tanio zrozumieć zachowanie układu i zbadać wpływ różnych parametrów na rozwiązanie przybliżone
- W modelowaniu można uwzględnić więcej ważnych cech niż gdyby rozwiązanie miało być analityczne
- Bez zrozumienia fizyki i podstaw teoretycznych MES można uzyskać wyniki, ale nie da się ocenić ich wartości
- Znajomość MES jest niezbędna dla nowoczesnego inżyniera, bo jest to dominująca technologia obliczeniowa

# Idea MES




Zadanie: znajdź obwód $L$ koła o średnicy $d = 2r$.

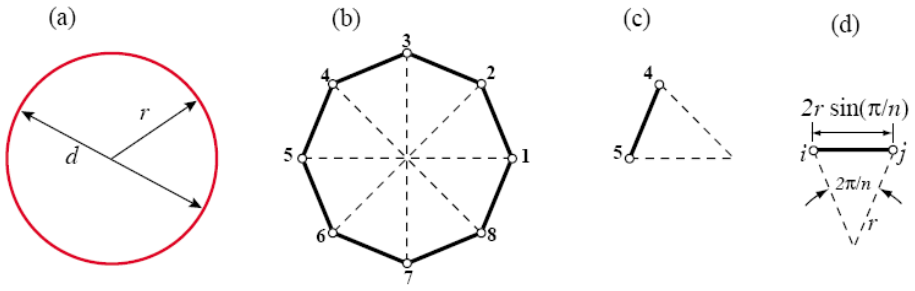
Rozwiązanie dokładne: $L = \pi d$.

Rozwiązanie dyskretne: wpisz wielokąt o $n$ bokach, określ długość boku $L_{ij}$, oblicz obwód wielokąta $\tilde{L} = nL_{ij}$, zwiększaj $n$ dla uzyskania dokładniejszej aproksymacji obwodu koła aż $\tilde{L} \approx L$

Jeśli $d = 1$, $n = 4 \longrightarrow \tilde{L} \approx 2.8284$, $n = 32 \longrightarrow \tilde{L} \approx 3.1365$.



# Idea MES

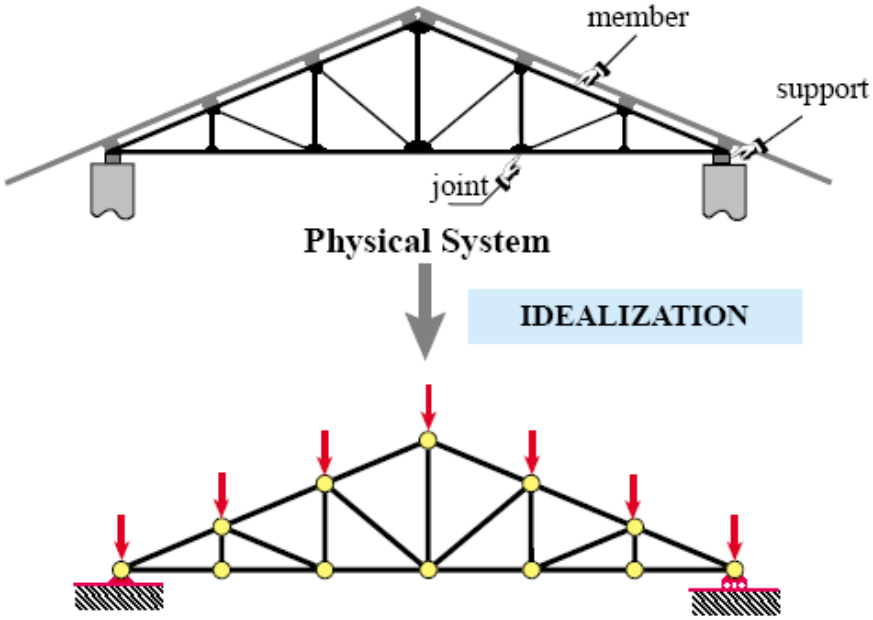



Dyskretna aproksymacja:

boki $\longrightarrow$ elementy skończone (*finite elements*)
wierzchołki $\longrightarrow$ węzły (*nodes*)
podział na elementy (*disassembly, decomposition*)
analiza typowego (prostego) elementu (obliczenie $L_{ij}$)
połączenie $n$ elementów (*assembly*)
obliczenie długości obwodu $\tilde{L}$ (*solution*)

Idea MES pochodzi od egipskich matematyków (1800 p.n.e.) i Archimedesa (250 p.n.e.), choć rozwój metody nastąpił wraz z rozwojem komputerów (od lat 60-tych)

# Fizyczna interpretacja MES




Uproszczona droga od konstrukcji do dyskretnego modelu MES
Zachowanie elementu charakteryzują stopnie swobody węzłów
Zachowanie układu określają elementy i ich interakcje



# Model numeryczny

## Układ równań liniowych

$$\mathbf{Kd} = \mathbf{f}$$

**K** - macierz sztywności

**d** - wektor stopni swobody

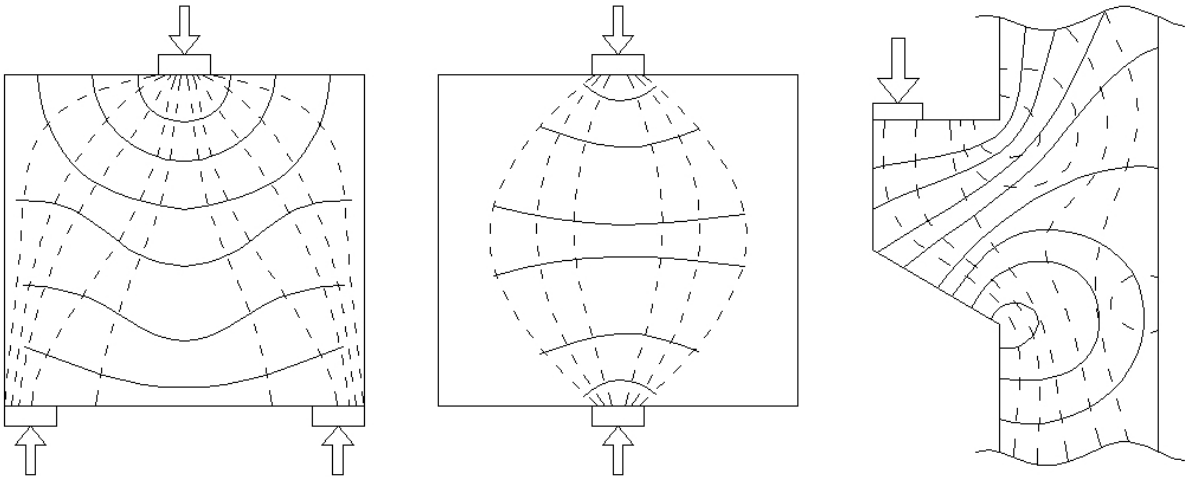
**f** - wektor obciążeń

Podobnie dla różnych problemów stacjonarnych fizyki

Błędy w modelowaniu MES

- Błąd modelowania
- Błąd dyskretyzacji
- Błąd rozwiązania

# Rozumienie działania konstrukcji

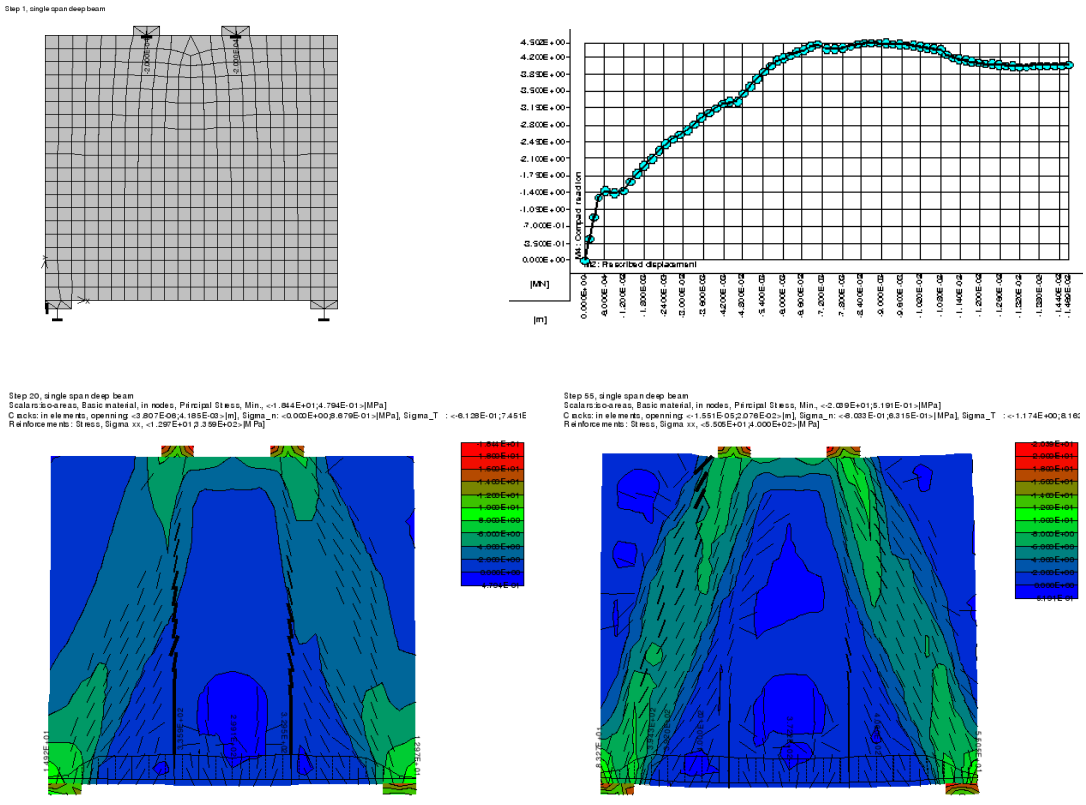


_____ rozciąganie

_ _ _ _ _ _ _ _ _ _ ściskanie



# Analiza zarysowania tarczy żelbetowej programem ATENA (M. Kwasek)



# Symulacje w inżynierii lądowej i fizyce

TNO DIANA `http://www.tnodiana.com`
Czteroprzęsłowa płyta pod obciążeniem ruchomym
Budynek pod obciążeniem sejsmicznym
Przepływ powietrza dookoła komina

ADINA R&D, Inc. `http://www.adina.com`
Kask Auto Zapora

ANSYS, Inc. `http://www.ansys.com`
Powłoka Uszczelka Kółko